MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT-2020- Togo	Durée : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 3
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE D	

Exercice 1 (4,5 points)

On tire trois boules simultanément et au hasard d'une urne contenant trois boules blanches, quatre boules bleues et trois boules rouges. On suppose l'équiprobabilité des tirages. Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1- Quelle est la probabilité d'avoir une boule de chaque couleur ? (0,5 pt)

2- X est la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.

a/ Déterminer la loi de probabilité de X. (1 pt)

b/ Calculer l'espérance mathématique de X et son écart-type. (0,5 pt)

3- Pour gagner, il faut tirer au moins deux boules blanches, mais on estime qu'un joueur sur quatre est un tricheur et qu'un tricheur gagne avec une probabilité égale à 1/3.

On note : T l'événement « être tricheur» et G l'événement « gagner au jeu ».

a/ Définir l'événement contraire de T puis calculer la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{G}/\overline{\mathrm{T}})$.

En déduire la probabilité de l'événement $\mathrm{G} \cap \overline{\mathrm{T}}$. (1 pt)

b/ Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{G} \cap \mathrm{T})$. (0,5 pt)

c/ Démontrer que la probabilité de l'événement G est $\frac{53}{240}$. (0,5 pt)

d/ Calculer la probabilité qu'une personne qui a gagné soit tricheur. (0,5 pt)

Exercice 2 (4,5 points)

f est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 - (2+3i)z^2 + (2+4i)z + 2 - 4i.$$

1-a/ Vérifier que $f(i) = 0$. (0,5 pt)

b/ Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $f(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$. (0,5 pt)

c/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. (0,5 pt)

2- On considère l'application g du plan dans le plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z - 1 + 2i$.

a/ Soit A le point d'affixe 1+ 3i. Déterminer l'affixe de A' image de A par g. (0,5 pt)

b/ On note z_A l'affixe du point A et $z_{A'}$ l'affixe du point A'. Pour tout z différent de A, déterminer le nombre complexe $\frac{z' - z_{A'}}{z - z_A}$. (0,5 pt)

c/ Pour tout M distinct de A, déterminer Mes$(\widehat{\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A'M'}})$ puis $\frac{A'M'}{AM}$. (0,5 pt)

d/ En déduire les éléments caractéristiques de g. (0,5 pt)

3- Montrer que pour tout M différent de A, le triangle AMM' est rectangle isocèle en M'. (1 pt)

Problème (11 points)

Partie A

Soit la fonction numérique de variable réelle x définie par : $g(x) = x^2 - 2ln|x|$.

1- Déterminer l'ensemble de définition D de g. (0,25 pt)

2- Etudier la parité de g. (0,25 pt)

3- Calculer les limites de g en 0 et en + ∞. (0,5 pt)

4- Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g. (0,25 pt)

5-a/ Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation. (0,75 pt)

b/ Montrer que pour tout x de D, $g(x) > 0$. (0,25 pt)

Partie B

On considère la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = -x + 3 - \frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) d'unité graphique 1 cm.

1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis les limites à gauche et à droite en 0 de f. (1 pt)

2-a/ Calculer la fonction dérivée f' de f . Vérifier que pour tout réel x de IR*, $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$. (0,5 pt)

b/ Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (0,75 pt)

3- Calculer $f(1)$ et montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont une négative notée $\propto$. Vérifier que $-0,25 < \propto < -0,24$. (0,75 pt)

4-a/ Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 3 - x$ est asymptote à la courbe (C). (0,5 pt)

b/ Etudier la position de (C) par rapport à (Δ). (0,75 pt)

5-a/ Pour quelles valeurs x_0 la courbe (C) admet-elle au point d'abscisse x_0, une tangente parallèle à (Δ) ? (0,5 pt)

b/ Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x = -1$. (0,25 pt)

6- Construire la droite (Δ), la courbe (C) et la tangente (T). (1,5 pts)

Partie C

Soit h la fonction définie par $h(x) = -2ln(-x) - (ln(-x))^2$.

1- Montrer que h est une primitve sur $]-\infty, 0[$ de la fonction $x \longmapsto -\frac{2}{x} - \frac{2ln|x|}{x}$. (0,5 pt)

2-a/ Montrer que la restriction φ de f à l'intervalle $]-\infty; \propto[$ est une bijection sur un intervalle I à préciser. (0,5 pt)

b/ φ^{-1} est la bijection réciproque de φ. Construire la courbe (C') de φ^{-1} dans le même repère que (C). (0,5 pt)

3- Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C'), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 6$. (0,75 pt)