

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE OFFICE DU BACCALAUREAT	BACCALAUREAT 2019	Durée : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 3
	SERIE D	

### Exercice 1 (3 points)

Soit les deux intégrales définies par :

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx.$$

1- Calculer  $I + J$ . (0,75 pt)

2-a/ Montrer que  $J - I = \int_{\pi}^0 e^x \cos ax dx$  où  $a$  est un réel à déterminer. (0,5 pt)

b/ A l'aide d'une double intégration par parties, démontrer que  $J - I = \frac{1}{5}(1 - e^{\pi})$ . (1 pt)

3- Déterminer les valeurs exactes de  $I$  et de  $J$ . (0,75 pt)

### Exercice 2 (6 points)

I- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  on considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives :

$$Z_A = -i; \quad Z_B = 1 + i; \quad Z_C = -1 + 2i; \quad Z_D = -2.$$

1- Placer sur une figure les points  $A, B, C$  et  $D$ . (0,5 pt)

2-a/ Interpréter géométriquement le module et l'argument du nombre complexe

$$\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_D} = Z. \quad (0,5 \text{ pt})$$

b/ Calculer le nombre complexe  $Z$ . (0,25 pt)

3- Déterminer le module et l'argument de  $Z$  puis en déduire la nature du quadrilatère  $ABCD$ . (0,75 pt)

II- Soit  $\lambda$  un nombre complexe de module 1 différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel  $n$  la suite  $(Z_n)$  de nombres complexes par :

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_{n+1} = \lambda Z_n - i \end{cases}$$

On note  $M_n$  le point d'affixe  $Z_n$ .

1-a/ Calculer  $Z_1, Z_2$  et  $Z_3$ . (0,75 pt)

b/ Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda + 1)i$ . (0,5 pt)

c/ En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = \frac{1 - \lambda^n}{\lambda - 1}i$ . (0,5 pt)

2- On suppose qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que  $\lambda^k = 1$ .

Démontrer que pour tout entier naturel,  $Z_{n+k} = Z_n$ . (0,25 pt)

3- Etude du cas  $\lambda = i$ .

a/ Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = Z_{4n+k}$ . (0,25 pt)

b/ Montrer que  $M_{n+1}$  est l'image de  $M_n$  par une rotation  $\varphi$  dont on précisera le centre et l'angle. (0,5 pt)

c/ Déterminer les images de  $A, B, C$ , et  $D$  par  $\varphi$  et placer dans le repère précédent ces images. (1 pt)

d/ Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, Z_{4n+1} = -i$ . (0,25 pt)

## Problème (11 points)

### Partie A

1- Résoudre l'équation différentielle (E) :  $2y' - y = 0$  dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur IR. (0,5 pt)

2- On considère l'équation différentielle (E') :  $2y' - y = (1-x)e^{\frac{x}{2}}$ .

a/ Déterminer deux réels  $m$  et  $p$  tels que la fonction  $f$  définie sur IR par :

$f(x) = (mx^2 + px)e^{\frac{x}{2}}$  soit solution de (E'). (1,5 pts)

b/ Soit  $g$  une fonction définie et dérivable sur IR.

b1/ Montrer que  $g$  est solution de (E') si, et seulement si,  $g - f$  est solution de (E). (0,5 pt)

b2/ Résoudre l'équation (E'). (0,5 pt)

3- Déterminer la solution  $g_0$  de (E') dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  passe par le point  $A(1,0)$ . (0,5 pt)

### Partie B

Soit  $h$  la fonction définie sur IR par :  $h(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}}$ .

On désigne par  $(C)$  sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique : 1 cm.

1- Déterminer les limites de la fonction  $h$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . (0,5 pt)

2- Etudier la dérivabilité de  $h$  sur IR, et déterminer la fonction dérivée  $h'$  de  $h$ . (0,75 pt)

3- Etudier le sens de variation de la fonction  $h$  puis dresser son tableau de variation. (1 pt)

4- Soit  $\varphi$  la fonction définie sur IR par  $\varphi(x) = -e^{\frac{x}{2}}$  et par  $(\Gamma)$  sa courbe représentative.

a/ Etudier les positions relatives de  $(C)$  et  $(\Gamma)$ . (1 pt)

b/ Construire les courbes  $(C)$  et  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (1,25 pts)

5-a/ Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction  $H : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{\frac{x}{2}}$  soit une primitive de  $h$  sur IR. (0,75 pt)

b/ Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine du plan limité par la courbe  $(C)$ ,  $(\Gamma)$  et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 3$ . (0,5 pt)

### Partie C

On considère la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$U_n = \int_{n+1}^{n+2} -h(t)dt.$$

1- Interpréter géométriquement  $U_0$ . (0,25 pt)

2-a/ Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $-h(n+1) \leq U_n \leq -h(n+2)$ . (0,5 pt)

b/ En déduire le sens de variation de la suite  $(U_n)$ . (0,5 pt)

3- La suite  $(U_n)$  est-elle convergente ? (0,5 pt)