Pays : Togo	**Année :** 2016	**Session :** Mathématiques
Série : BAC, Série D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 3

EXERCICE 1 (03,50 *points*)

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_0^1 (\sqrt{x^2+2})dx$.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$, où ln désigne le logarithme népérien.

a) Montrer que f est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $[0\,;1]$.

b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

2. a) Sans calculer explicitement J et K, montrer que : $K = J + 2I$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que : $K = \sqrt{3} - J$.

3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de J et K.

EXERCICE 2 (04,50 *points*)

Pour analyser le fonctionnement d'une machine, on note mois par mois, ses pannes et on remarque que :

- Sur un mois, la machine tombe au plus une fois en panne ;
- Si pendant le mois m la machine n'a pas de panne, la probabilité qu'elle en ait une le mois suivant $m + 1$ est 0,24 ;
- Si la machine tombe en panne le mois m (ce qui entraîne sa révision), la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant $m + 1$ est 0,04 ;
- La probabilité que la machine tombe en panne le premier mois après sa mise en service est 0,1.

On désigne par E_n l'événement « la machine tombe en panne le n-ième mois suivant sa mise en service ».

Si A est un événement, $\overline{A}$ représentera son contraire.

On note P_n la probabilité de E_n (on a ainsi $P_1 = 0{,}1$).

1. a) Donner les valeurs numériques des probabilités de « E_{n+1} sachant E_n » et de « E_{n+1} sachant $\overline{E_n}$ ».

b) Exprimer les probabilités de « E_{n+1} et E_n » et de « E_{n+1} et $\overline{E_n}$ » en fonction de P_n.

c) Utiliser les questions précédentes pour montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$P_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2P_n$.

2. a) Résoudre l'équation : $P = 0{,}24 - 0{,}2P$.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $U_n = P_n - P$.

Calculer U_{n+1} en fonction de U_n.

En déduire les expressions de U_n et de P_n en fonction de n.

c) Montrer que la suite (P_n) est convergente et déterminer sa limite.

PROBLEME (12 *points*)

Soit, pour tout entier naturel k non nul, la fonction f_k définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_k(x) = x - k - \frac{k\ln x}{x}$.
La représentation graphique de f_k dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormal est notée (C_k).
Unité graphique : 2 cm.

Partie A

1. Soit pour tout entier naturel k, la fonction g_k définie par : $g_k(x) = x^2 - k + k\ln x$.

a) Étudier le sens de variation de g_k ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution unique notée $\propto_k$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[1\,;3]$.

2. Établir que, pour x élément de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f_k'(x) = \frac{g_k(x)}{x^2}$.

Étudier le signe de $g_k(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k.

3. a) Étudier les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D_k) d'équation $y = x - k$ est asymptote à la courbe (C_k).

c) Étudier la position de (C_k) par rapport à (D_k).

Partie B

Étude des cas particuliers $k = 1$ et $k = 2$.

1- $\propto_k$ étant le nombre défini en **A-1**, montrer que : $\propto_1 = 1$ et $1{,}2 < \propto_2 < 1{,}3$.

2. a) Montrer que : $f_2(\propto_2) = 2\propto_2 - 2 - \frac{2}{\propto_2}$.

b) Utiliser l'encadrement de $\propto_2$ pour donner un encadrement de $f_2(\propto_2)$.

3. Donner les tableaux de variation de f_1 et f_2.

4. Représenter dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2).

5. Calculer en cm^2, la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre (C_1) et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = 2$ et $y = x - 1$.

Partie C

1. Pour tout entier k non nul et pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, calculer $f_{k+1}(x) - f_k(x)$.
Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

a) Étudier le sens de variation de h ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β et que $\beta \in]0\,;1[$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $f_k(\beta) = \beta$.

3. a) A l'aide des résultats obtenus dans les questions **1** et **2** de cette partie **C**, établir que toutes les courbes (C_k) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, préciser les positions relatives de (C_{k+1}) et (C_k).