Pays : Togo	**Année :** 2014	**Session :** normale
Série : BAC, série D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 3

Exercice 1

Soit l'équation (E) : $z \in \mathbb{C},\ z^n = \dfrac{-9\sqrt{3}+27i}{2},\ n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les solutions z_k de (E).
2. On pose : $n = 5$.

Représenter dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\ \vec{v})$ les points-images des solutions z_k de (E).

3. On pose : $\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$.

a) Soit $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Exprimer α en fonction de $\bar{j}$.

b) Montrer que α est une solution de l'équation $z^5 = \dfrac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$.

4. Soit la transformation T de P dans P, qui au point M de P d'affixe z associe le point M' de P d'affixe z' tels que : $z' = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)z + \dfrac{5+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

a) Écrire la forme algébrique du nombre complexe $w = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$.

b) Donner la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 2

Un secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.
Il y a 8% d'ingénieurs et 80% d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des opérateurs de production.
On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

- M l'événement : « Le personnel interrogé est un agent de maintenance. » ;
- O l'événement : « Le personnel interrogé est un opérateur de production. » ;
- I l'évènement : « Le personnel interrogé est un ingénieur. » ;
- F l'évènement : « Le personnel interrogé est une femme. »

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2. Calculer la probabilité d'interroger :
a) un agent de maintenance ;
b) une femme agent de maintenance ;
c) une femme.
3. Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue.
Des études ont montré que sur une journée :

- La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002.
- La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003.

- La probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'événement : « L'alarme se déclenche. »
- B l'événement : « Une panne se produit. »

a) Démontrer que la probabilité qu'une panne se produise et l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
b) Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
c) Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

Problème

A) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = -x + e^{\frac{x}{2}} - 3 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = 2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

On désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\ \vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. *a*) Étudier la continuité de f en 0.

b) Montrer que pour tout nombre réel non nul *u*, on a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\frac{x}{u}} - 1}{x} = \dfrac{1}{u}$.

c) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x)+2}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)+2}{x}$.

Interpréter analytiquement et géométriquement les résultats obtenus.

2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3. *a*) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que : $\alpha < 0 < \beta < 1$.

b) Vérifier que : $-2{,}75 < \alpha < -2{,}74$.

B) On pose : $g(x) = e^{-\frac{x}{4}}$ et I = [0 ; 1].

1. Monter que β est l'unique solution de l'équation : $x > 0,\ g(x) = x$.

2. Montrer que pour tout *x* appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

3. Soit *g*' la fonction dérivée de *g*. Montrer que pour tout *x* de I, on a : $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.

4. On définit la suite (U_n) par : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Démontrer par récurrence que (U_n) est une suite d'éléments de I.

b) En appliquant les inégalités des accroissements finis, démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}\,|U_n - \beta|$, puis que $|U_n - \beta| \leq (\frac{1}{2})^{2n}$.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

d) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour lequel U_{n_0} est une approximation de β à 10^{-3} près.

e) Calculer la valeur correspondante de U_{n_0}.

C)

1. *a*) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 3$ est une asymptote à ($\mathscr{C}$) en $-\infty$.

b) Étudier l'autre branche infinie de ($\mathscr{C}$).

2. Construire avec soin (Δ) et ($\mathscr{C}$) dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\ \vec{j})$. (*On prendra* : $\alpha \approx -2{,}7$ *et* $\beta \approx 0{,}8$).

3. *a*) Par des intégrations par parties, calculer $\mathrm{I}_\beta = \int_0^\beta f(x)\mathrm{d}x$.

b) Exprimer l'aire $\mathscr{A}(\alpha, \beta)$ du domaine du plan limité par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$ en fonction de α et β seulement.