Pays : Togo	**Année :** 2016	**Session :** Mathématiques
Série : BAC, Séries C-E	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

EXERCICE 1 (04 *points*)

1. En notant $p(A/B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et $\overline{B}$ l'événement contraire de B, démontrer que :

$$p(A/\overline{B}) = \frac{p(A) - p(A/B).p(B)}{1 - p(B)}.$$

2. Lors d'une récente saison de chasse (période durant laquelle la chasse est autorisée dans une région donnée), on a pu établir les statistiques suivantes :
30% des renards sont enragés ; parmi les renards abattus, 40% étaient enragés.

a) En désignant par b ($b \neq 1$) la probabilité pour qu'un renard soit abattu lors de la saison de chasse, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un renard survivant soit enragé.
(*Durant la période considérée, on négligera les autres causes de décès ainsi que les nouveaux cas de rage*).

b) Quelle est la plus petite valeur b pour que p soit inférieure ou égale à 0,1 ?

c) A l'issue d'une saison de chasse, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à 1/3. Une chasse est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la saison de chasse.
Quelle est, dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la saison ?

EXERCICE 2 (05,50 *points*)

On considère un cube ABCDEFGH d'arrête 1.

1. a) Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$ est nul.

c) Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$ est nul.

d) Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
Déduire de **1. a)** que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) ; préciser la position du point I sur le segment [AG].

3. Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) Écrire une équation du plan (BDE).

b) Écrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite (Δ) avec le plan (BDE).

d) Calculer $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE}$.

e) En déduire la distance du point H au plan (BDE), puis le volume du tétraèdre HBDE.

Rappel : Volume du tétraèdre : $\frac{1}{3} b \times h$, où b est la surface de base et h la hauteur.

PROBLÈME (10,50 *points*)

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). Unité graphique : 2 cm.
Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^x & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 & \\ f(x) = \dfrac{-x^2 \ln x}{1+x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On désigne par ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans le repère (O,$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Partie A

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. Soit k la fonction numérique définie par : $k(x) = (x + 2)\ln x + x + 1$.

a) Étudier le sens de variation de la dérivée k' de k.

b)

b₁) Montrer que l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$.

b₂) Déterminer un encadrement de $\propto$ d'amplitude 10^{-1}.
En déduire le signe de $k(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
(*On pourra utiliser les questions **1** et **2***).

4. a) Étudier les branches infinies de ($\mathcal{C}$).

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

c) Tracer ($\mathcal{C}$) et (T) dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

5. Soit F l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y. \end{cases}$$

a) Montrer que F est une bijection de $\mathcal{P}$ et que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe à préciser.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par F.

c) Déterminer l'ensemble des milieux de $[MM']$ quand M décrit $\mathcal{P}$.

d) Montrer que F est une affinité que l'on caractérisera.

e) Soit M un point de ($\mathcal{C}$), déterminer les équations de l'ensemble ($\mathcal{C}'$) décrit par son image M' par l'application F.

Partie B

On pose sur [0, 1], $\begin{cases} g_n(t) = -t^n \ln t, \; t \neq 0 \,;\, n \in \mathbb{N}^*. \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$

$$J_n = \int_0^1 g_n(t)dt \text{ et } J = \int_0^1 f(t)dt.$$

1. a) Montrer que J_n existe.

b) En admettant que $J_n = \lim\limits_{x \to 0} \int_x^1 g_n(t)dt$ pour $x \in]0, 1]$, calculer J_n.

2. Soit t un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer le produit : $P_n(t) = (1 + t)(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1})$.

b) Montrer que : $\forall\, t \in [0, 1]$, $g_2(t) - g_3(t) + g_4(t) \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} g_{n+1}(t) + (-1)^n \dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t} = f(t)$

puis que : $J = J_2 - J_3 + J_4 - \ldots. + (-1)^{n-1} J_{n+1} + (-1)^n \int_0^1 \dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t} dt.$

c) En s'aidant d'une majoration de $\dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t}$, démontrer que : $0 \leq \int_0^1 \dfrac{g_{n+2}(t)}{1+t} dt \leq \dfrac{1}{(n+3)^2}$.

3. Soit n un entier naturel strictement positif. On pose : $S_n = \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \ldots.. + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{(n+2)^2}$.
Montrer que : $\lim S_n = J$.