MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2021	Durée : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 3
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE D	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (1,5 points)

Choisir la bonne réponse à chaque question parmi les quatre propositions suivantes sans justifier. (Exemple : 4-d).

1- Soit le nombre complexe $\alpha = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$. Le nombre $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3$ est égal à :

a/ $1 + \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}$; b/ 0 ; c/ 1 ; d/ $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2- Soit A, B, et C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$1+5i$; $-1-i$ et $2-2i$. Le triangle ABC est :

a/ Rectangle isocèle ; b/ Isocèle ; c/ Rectangle ; d/ Equilatéral.

3- Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives : $1+i$ et 4.

Soit C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

L'affixe du point C est : a/ $Z_C = 4i$; b/ $Z_C = 2-4i$; c/ $Z_C = -1-i$; d/ $Z_C = -2i$.

Exercice 2 (2,5 points)

1- Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$\forall t \in IR,\ \frac{1}{(1+e^{1-2t})^2} = a + \frac{be^{1-2t}}{1+e^{1-2t}} + \frac{ce^{1-2t}}{(1+e^{1-2t})^2}$. (0,75 pt)

2- Calculer alors l'intégrale $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1+e^{1-2t})^2}$. (0,75 pt)

3- On pose $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{te^{1-2t}}{(1+e^{1-2t})^3} dt$.

a/ A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J. (0,75 pt)

b/ En déduire la valeur exacte de I. (0,25 pt)

Exercice 3 (4,5 points)

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher marquées 1, 2, 3 4. Une épreuve consiste à prélever une première boule de l'urne dont le numéro sera noté a puis, sans la remettre dans l'urne, une seconde boule dont le numéro sera noté b. Au résultat $(a; b)$ d'une épreuve, on associe l'application f du plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, dans lui-même qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{a}{2}(\cos\frac{b\pi}{4} + i\sin\frac{b\pi}{4})z$.

1- Donner tous les résultats $(a; b)$.

Caractériser géométriquement les applications correspondantes qui ne sont pas des isométries. (1,5 pts)

2- Soit A le point d'affixe $z_0 = 2i$ et A' son image par f d'affixe z'_0.

Calculer le module et l'argument de z_0 et ceux de z'_0 suivant les valeurs de $(a; b)$, où b est impair. (1 pt)

3- Calculer la probabilité de l'événement E : " les droites (OA) et (OA') sont perpendiculaires". (1 pt)

4- Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui au résultat $(a; b)$ d'une épreuve associe le module de z'_0 ? Calculer l'espérance mathématique de X. (1 pt)

Exercice 4 (4 points)

Soit n un entier naturel non nul.

1- Résoudre l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{n+1}y = 0$ (1) (0,5 pt)

2- On considère l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{n+1}y = \frac{x+1}{(n+1)^2}$ (2)

Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur IR par :

$g(x) = ax + b$ soit solution de (2). (0,5 pt)

3- a/ Montrer qu'une fonction h dérivable sur IR est solution de (2) si et seulement si $h - g$ est solution de (1). (0,5 pt)

b/ En déduire toutes les solutions de (2). (0,5 pt)

c/ Parmi ces solutions, déterminer la solution f telle que $f(0) = 0$. (0,25 pt)

4- On considère la fonction f_n définie sur IR par : $f_n(x) = \frac{x-n}{n+1} + \frac{n}{n+1}e^{\left(\frac{-x}{n+1}\right)}$.

Etudier le signe de $f_n'(x)$. En déduire le tableau de variation de f_n. Utiliser $f_n(0)$ pour montrer que f_n admet un minimum m strictement négatif que l'on calculera. (1,75 pts)

Exercice 5 (7,5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{x}{2} + x\ln(1 + \frac{1}{x}) \\ f(0) = 1. \end{cases}$

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f en 0. Que peut on dire de (C) au point d'abscisse 0. (0,75 pt)

2- a/ Déterminer l'ensemble de définition D de f puis calculer la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de f. (0,5 pt)

b/ Etudier le sens de variation de f'. Déterminer les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$ puis en déduire que f' est positive sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]0; +\infty[$. (1 pt)

3- Déterminer les limites de f aux bornes de D, puis dresser le tableau de variation de f. (1 pt)

4- a/ Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2 + \frac{x}{2}$ est asymptote à (C). (0,25 pt)

b/ Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (Δ), la première bissectrice et la courbe (C). (unité graphique : 1 cm). (1,5 pts)

5- Soit g la fonction définie sur $[3; 5]$ par $g(x) = f(x) - x$.

a/ Utiliser le sens de variations de f' pour montrer que : $\forall x \in [3; 5]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$ puis $g'(x) < 0$. (0,75 pt)

b/ Utiliser le sens de variation de g pour montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$. (0,25 pt)

c/ Utiliser les inégalités des accroissements finis pour montrer que : $\forall x \in [3; 5]$, $|f(x) - \propto| \leq \frac{2}{3}|x - \propto|$. (0,25 pt)

d/ On définit la suite $(U_n)_{n \in IN}$ par $U_0 = 3$ et $\forall n \in IN, U_{n+1} = f(U_n)$.

i/ Démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_n - \propto| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$. (0,75 pt)

ii/ En déduire la limite de $(U_n)_{n \in IN}$ puis une valeur approchée de cette limite à 0,2 près. (0,5 pt)