CCK - ADÈLE	BAC II-BLANC AVRIL 2019	ANNÉE SCOLAIRE 2018-2019
CME - DON BOSCO	MATHÉMATIQUES	DURÉE : 4 H
AVRIL 2019	SÉRIE D	Coef : 3

Exercice 1 **(5 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

I.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$. On pose z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre. (0,75pt)
2. Soit A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe z_3 du point C tel que $r(\text{B}) = \text{C}$. (0,75pt)

II. Soit m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z_1 associe le point M′ d'affixe z' définie par : $z' = (m+i)z + m - 1 - i$.

1. (a) Peut-on choisir m un réel tel que T_m soit une translation ? (0,5pt)
   (b) Déterminer le réel m tel que T_m soit une rotation. (0,5pt)
2. Dans la suite, on pose $m = 1$.
   (a) Calculer l'affixe du point Ω, point invariant par T_1. (0,5pt)
   (b) Montrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques. (1,5pt)
   (c) Montrer que si M est distinct de Ω, alors ΩMM′ est un triangle isocèle en M. (0,5pt)

Exercice 2 **(4 points)**

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard deux boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité de l'événement B : "tirer deux boules blanches" ? (0,5pt)
2. On note par E l'événement : "les boules tirées sont de même couleur".
   (a) Montrer que $P(\text{E}) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$. (0,5pt)
   (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\text{E})$ puis interpréter ce résultat. (0,5pt)
3. Dans la suite, on prend $n = 2$. Calculer $P(\text{E})$. (0,25pt)
4. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois. Il mise au départ la somme de $500\,F$. Pour chaque tirage :
   – si les deux boules sont de même couleur, il reçoit $500\,F$
   – si les deux boules sont de couleurs différentes, il reçoit $100\,F$
   On appelle gain algébrique du joueur la différence, à l'issue des deux tirages indépendants, entre la somme perçue par le joueur et sa mise initiale. On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   (a) Justifier que les valeurs prises par X sont : $-300\,F$, $100\,F$ et $500\,F$. (0,75pt)
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X. (0,75pt)
   (c) Le joueur peut-il espérer gagner à ce jeu ? Justifier la réponse. (0,75pt)

Problème **(11 points)**
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^x - x & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(x) = 2x(-1 + \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

A/ Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;\,0]$ par : $g(x) = xe^x - x$.

1. Calculer la limite de la fonction g en $-\infty$. (0,25pt)
2. (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ où g' et g'' sont respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de g. (0,5pt)
   (b) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de g admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées. (0,5pt)
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction g' puis en déduire le signe de $g'(x)$. (0,75pt)

B/

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. (0,25pt)
2. Démontrer que f est continue en 0. (0,25pt)
3. (a) Étudier la dérivabilité de f en 0. (0,5pt)
   En déduire une interprétation géométrique du résultat. (0,25pt)
   (b) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et étudier son signe. (1pt)
4. (a) Calculer la limite de f en $+\infty$. (0,25pt)
   (b) Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition. (0,5pt)
5. Soit φ l'application définie par $\varphi :\ J \longleftrightarrow f(J)\,;\ x \longmapsto \varphi(x) = f(x)$ où $J = [1\,;\,+\infty[$.
   (a) Démontrer que φ est une bijection. (0,5pt)
   (b) Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ.
   Montrer que la fonction dérivée $(\varphi^{-1})'$ de φ^{-1} est positive sur $f(J) - \{-2\}$. (0,75pt)

C/ On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$. (0,25pt)
2. Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$. (0,5pt)
3. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les tangentes en O dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. (1,5pt)
4. Soit h la fonction numérique définie par $h(x) = -f(x)$, et $(\mathcal{C}_h)$ sa courbe représentative.
   Construire $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$. (0,5pt)
5. Soit $H(x) = \int_1^x h(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in J$
   (a) Démontrer que la fonction H est bien définie et continue sur J. (0,5pt)
   (b) Calculer $H(e)$. En donner une interprétation géométrique. (1pt)
   (c) Calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ de la région du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_h)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. (0,5pt)

† † † BON TRAVAIL ET BON COURAGE † † †